

**ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ
ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТМ-ВОЛН,
РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СЛОЕ С КЕРРОВСКОЙ
НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

Аннотация. Рассматривается задача о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с керровской нелинейностью. Физическая задача сводится к решению нелинейной краевой задачи на собственные значения для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе предложен новый метод решения рассматриваемой нелинейной краевой задачи. Предложенный метод позволяет исследовать нелинейности более сложного типа. Приведены численные результаты.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача на собственные значения, обыкновенное дифференциальное уравнение, задача Коши.

Abstract. The article considers electromagnetic TM-waves propagation in a layer with Kerr nonlinearity. The physical problem is reduced to a nonlinear boundary Eigenvalue problem for a system of two ordinary differential equations. A new method for solving the nonlinear boundary eigenvalue problem is suggested. The method can be applied to study more complicated nonlinearities. Some numerical results are shown.

Key words: nonlinear boundary eigenvalue problem, ordinary differential equation, Cauchy problem.

Введение

Задача распространения электромагнитных ТМ-волн в слое с керровской нелинейностью решена в работе [1]. Об актуальности и сложности рассматриваемой проблемы см., например, [1, 2] и библиографию там. Однако подход, предложенный в [1] и развитый в [3], несмотря на свою общность, все же не позволяет исследовать любые произвольные нелинейности. Это связано с тем, что метод из [1, 3] может быть применен, когда явно найден первый интеграл системы дифференциальных уравнений, описывающих задачу. Ясно, что это возможно не всегда. Поэтому важно разработать подход, который был бы свободен от подобного недостатка. Численно-аналитический метод, предложенный в этой работе, позволяет, в принципе, работать с любыми нелинейностями. В рассматриваемой работе этот метод применен к керровской нелинейности в слое. Возможность решить задачу для керровской нелинейности методом из [1] позволяет провести численную проверку работы предложенного метода. Такая проверка показывает хорошее согласие результатов, полученных на основе предложенного здесь метода с результатами, полученными методом из [1].

1. Постановка задачи

Рассмотрим электромагнитные волны, распространяющиеся через однородный, изотропный, немагнитный диэлектрический слой, расположенный

между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянную диэлектрическую проницаемость $\epsilon_1 \geq \epsilon_0$ и $\epsilon_3 \geq \epsilon_0$ соответственно, где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что $\mu = \mu_0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Далее считаем, что поля гармонически зависят от времени:

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{E}_-(x, y, z) \sin \omega t,$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(x, y, z, t) = \mathbf{H}_+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{H}_-(x, y, z) \sin \omega t,$$

где ω – круговая частота; $\mathbf{E}_+, \mathbf{E}_-, \mathbf{H}_+, \mathbf{H}_-$ – вещественные искомые функции.

Образуем комплексные амплитуды полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + i\mathbf{E}_-,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_+ + i\mathbf{H}_-.$$

Множители $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ ниже будут опущены.

Электромагнитное поле удовлетворяет системе уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (1)$$

условию непрерывности касательных компонент электромагнитного поля на границе раздела сред $x = 0$ и $x = h$, а также условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$ в областях $x < 0$ и $x > h$.

Диэлектрическая проницаемость внутри слоя описывается законом Керра: $\epsilon = \epsilon_2 + \alpha|\mathbf{E}|^2$, где α и $\epsilon_2 > \max(\epsilon_1, \epsilon_3)$ – положительные постоянные.

2. ТМ-поляризованные электромагнитные волны

Рассмотрим ТМ-поляризованные волны:

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)^T, \quad \mathbf{H} = (0, H_y, 0)^T,$$

где $E_x = E_x(x, y, z)$, $E_z = E_z(x, y, z)$, $H_y = H_y(x, y, z)$; $(\cdot)^T$ – операция транспонирования.

Легко показать [3], что компоненты полей не зависят от переменной y .

Волны, распространяющиеся вдоль границы z раздела сред, гармонически зависят от z . Учитывая все сказанное, получаем, что компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ имеют представление

$$E_x = E_x(x)e^{i\gamma z}, \quad E_z = E_z(x)e^{i\gamma z}, \quad H_y = H_y(x)e^{i\gamma z},$$

где γ – неизвестный спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Можно показать, что система (1) сводится к следующей системе (подробности см. в [3]):

$$\begin{cases} -Z'' + \gamma X' = \varepsilon Z, \\ -Z' + \gamma X = \gamma^{-1} \varepsilon X. \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) получена из (1) после нормировки в соответствии с формулами $\tilde{x} = kx$, $\frac{d}{dx} = k \frac{d}{d\tilde{x}}$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k}$, $\tilde{\varepsilon}_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0}$ ($j=1,2,3$), $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\varepsilon_0}$, где $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_0$ и $\mu = \mu_0$. Используя следующие обозначения $E_z = Z(\tilde{x})$, $iE_x = X(\tilde{x})$ и опуская тильду, получаем систему (2).

Будем искать те значения спектрального параметра γ (собственные значения), для которых существуют действительные решения $X(x)$, $Z(x)$ системы (2), γ полагаем действительным числом (так что $|\mathbf{E}|^2$ не зависит от z) и считаем, что

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < 0; \\ \varepsilon_2 + \alpha(X^2 + Z^2), & 0 < x < h; \\ \varepsilon_3, & x > h. \end{cases}$$

В данной работе мы рассмотрим случай, когда спектральный параметр γ удовлетворяет неравенствам $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \gamma^2 < \varepsilon_2$. Это условие соответствует классической задаче распространения ТМ-волн в линейном слое при $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$, $\varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$ и $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$.

Считаем, что функции $X(x)$ и $Z(x)$ дифференцируемы так, что

$$X(x) \in C(-\infty, 0] \cap C[0, h] \cap C[h, +\infty) \cap C^1(-\infty, 0] \cap C^1[0, h] \cap C^1[h, +\infty);$$

$$Z(x) \in C(-\infty, +\infty) \cap C^1(-\infty, 0] \cap C^1[0, h] \cap$$

$$\cap C^1[h, +\infty) \cap C^2(-\infty, 0) \cap C^2(0, h) \cap C^2(h, +\infty).$$

Такие условия непрерывности и дифференцируемости функций X и Z соответствуют физическому смыслу задачи. Очевидно, что система (2) является автономной. Такую систему после приведения к нормальной форме можно рассматривать как динамическую систему с аналитическими по X и Z правыми частями. Известно, что решения X , Z такой динамической системы сами являются аналитическими функциями независимой переменной [4]. Этот факт очень важен для вывода дисперсионного уравнения.

3. Решение системы дифференциальных уравнений

В полупространствах $x < 0$ и $x > h$ диэлектрическая проницаемость ε в уравнениях Максвелла (1) имеет постоянное скалярное значение ε_1 и ε_3 соответственно.

При $x < 0$ получаем $\varepsilon = \varepsilon_1$. Из (2) получаем решение (где учтены условия на бесконечности)

$$X(x) = Ae^{x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}, \quad Z(x) = \gamma^{-1}\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} Ae^{x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}}. \quad (3)$$

Легко видеть, что $\gamma^2 - \varepsilon_1 > 0$ [3].

При $x > h$ получаем $\varepsilon = \varepsilon_3$. Из (2) получаем решение (где учтены условия на бесконечности):

$$X(x) = Be^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}, \quad Z(x) = -\gamma^{-1}\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3} Be^{-(x-h)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}. \quad (4)$$

Здесь, как и в первом случае, можно показать, что $\gamma^2 - \varepsilon_3 > 0$ [3].

Постоянные A и B в решениях (3) и (4) определяются условиями сопряжения и начальными данными.

Внутри слоя $0 < x < h$, тогда $\varepsilon = \varepsilon_2 + \alpha(X^2 + Z^2)$. Систему (2) можно привести к следующему виду [3]:

$$\frac{dX}{dx} = \frac{\gamma^2(\varepsilon_2 + \alpha(X^2 + Z^2)) + 2\alpha(\varepsilon_2 + \alpha(X^2 + Z^2) - \gamma^2)X^2}{\gamma(2\alpha X^2 + \varepsilon_2 + \alpha(X^2 + Z^2))} Z; \quad (5)$$

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{\gamma}(\gamma^2 - \varepsilon_2 - \alpha(X^2 + Z^2))X. \quad (6)$$

Поделив (6) на (5), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{(\gamma^2 - \varepsilon_2 - \alpha(X^2 + Z^2))X \cdot (2\alpha X^2 + \varepsilon_2 + \alpha(X^2 + Z^2))}{(\gamma^2(\varepsilon_2 + \alpha(X^2 + Z^2)) + 2\alpha(\varepsilon_2 + \alpha(X^2 + Z^2) - \gamma^2)X^2)Z}. \quad (7)$$

4. Условия сопряжения

Как известно, касательные составляющие электромагнитного поля непрерывны на границе раздела сред. В рассматриваемом случае касательными составляющими являются компоненты H_y и E_z . Отсюда получаем:

$$H_y(h+0) = H_y(h-0), \quad H_y(0+0) = H_y(0-0),$$

$$E_z(h+0) = E_z(h-0), \quad E_z(0+0) = E_z(0-0).$$

Нормальные компоненты электромагнитного поля на границе раздела сред имеют разрыв первого рода. В рассматриваемом случае нормальной компонентой является E_x . Но произведение εE_x остается непрерывным на границе раздела сред.

Мы считаем, что значение $Z(h+0)$ (см. (4)) задано (начальное условие).

Из условий сопряжения получаем следующие условия для функций X, Z :

$$[\varepsilon X]_{x=0} = 0, [\varepsilon X]_{x=h} = 0, [Z]_{x=0} = 0, [Z]_{x=h} = 0, \quad (8)$$

$$\text{где } [f]_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x).$$

Обозначим

$$X_h = X(h-0), X_0 = X(0+0), Z_h = Z(h-0), Z_0 = Z(0+0).$$

$$\text{Кроме того, имеем } X(h+0) = -\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}} Z_h, \quad X(0-0) = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}} Z_0,$$

поскольку $Z_h = Z(h+0)$ и $Z_0 = Z(0+0)$.

Из условий (8) получаем два уравнения (для точек $x=0$ и $x=h$ соответственно):

$$X_0^3 + \frac{\varepsilon_2 + \alpha Z_0^2}{\alpha} X_0 - \frac{\gamma \varepsilon_1 Z_0}{\alpha \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}} = 0, \quad X_h^3 + \frac{\varepsilon_2 + \alpha Z_h^2}{\alpha} X_h + \frac{\gamma \varepsilon_3 Z_h}{\alpha \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}} = 0. \quad (9)$$

При $\alpha > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ из предыдущих уравнений получаем, что X_0 и Z_0 имеют одинаковые знаки, а X_h и Z_h – разные.

Поскольку Z_h известно, то можно найти и X_h . Теперь мы можем поставить задачу Коши для уравнения (7) с начальным условием $Z_h = Z(X_h)$. Решая задачу Коши, мы можем, используя первое уравнение (9), определить значения X_0, Z_0 . Величина γ является параметром. Находя решение задачи Коши для различных γ , мы следим за знаком левой части первого уравнения (9). Если между двумя последовательными значениями γ' и γ'' левая часть первого уравнения (9) меняет знак, значит, для некоторого $\gamma^* \in (\gamma', \gamma'')$ это уравнение удовлетворяется. И мы можем это γ^* эффективно вычислить. Найденное γ^* является собственным значением задачи. Но пока мы не знаем значение толщины слоя, которому найденное γ^* отвечает. В следующем пункте приведено дисперсионное уравнение, которое позволяет вычислить толщину слоя, соответствующую найденному γ^* .

5. Дисперсионное уравнение

Введем новые переменные:

$$\tau(x) = \frac{\varepsilon_2 + \alpha(X^2(x) + Z^2(x))}{\gamma^2}, \quad \eta(x) = \gamma \frac{X(x)}{Z(x)} \tau(x),$$

обозначим $\tau_0 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma^2}$. Тогда справедливы равенства

$$X^2 = \frac{\gamma^2 \eta^2 (\tau - \tau_0)}{\alpha(\eta^2 + \gamma^2 \tau^2)}, \quad Z^2 = \frac{\gamma^4 \tau^2 (\tau - \tau_0)}{\alpha(\eta^2 + \gamma^2 \tau^2)},$$

$$XZ = \frac{\gamma^3 \tau \eta (\tau - \tau_0)}{\alpha (\eta^2 + \gamma^2 \tau^2)}.$$

Система (5), (6) в новых переменных примет вид

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{dx} = 2\gamma^2 \frac{\tau^2 \eta (\tau - \tau_0) (2 - \tau)}{\tau (\eta^2 + \gamma^2 \tau^2) + 2\eta^2 (\tau - \tau_0)}, \\ \frac{d\eta}{dx} = \frac{\gamma^2 \tau^2 + \eta^2 (\tau - 1)}{\tau} \end{cases} \quad (10)$$

и

$$\frac{d\tau}{d\eta} = \frac{2\gamma^2 \tau^3 \eta (\tau - \tau_0) (2 - \tau)}{(\tau (\eta^2 + \gamma^2 \tau^2) + 2\eta^2 (\tau - \tau_0)) (\gamma^2 \tau^2 + \eta^2 (\tau - 1))}. \quad (11)$$

Можно показать [3], что дисперсионное уравнение имеет вид

$$-\int_{\eta_h}^{\eta_0} w d\eta + (N + 1)T = h, \quad (12)$$

где $N \geq 0$ – целое число; $\eta_0 = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}} > 0$, $\eta_h = -\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}} < 0$;

$w \equiv w(\eta) = \frac{\tau}{\gamma^2 \tau^2 + \eta^2 (\tau - 1)}$ и $\tau = \tau(\eta)$ определяется из решения задачи Коши

для уравнения (11) с начальными условиями

$$\eta_h = -\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_3}}, \quad \tau_h = \frac{\varepsilon_2 + \alpha (X_h^2 + Z_h^2)}{\gamma^2}; \quad T \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} w d\eta.$$

Формула (12) есть дисперсионное уравнение, справедливое для любого конечного h . Когда $N \neq 0$, возникает несколько уравнений при различных значениях N . Необходимо решать относительно γ каждое из получающихся уравнений.

Можно показать [3], что все рассматриваемые несобственные интегралы сходятся.

Для того чтобы вычислить значение h для конкретного γ^* из уравнения (12), поступаем следующим образом. Пределы интегрирования в (12) при заданном γ^* известны. Для вычисления интегралов в (12) используем какой-либо из известных численных методов. Важный момент заключается в том, что при вычислении любого слагаемого в интегральной сумме (квадратурной формуле) необходимо вычислить значение подынтегральной функции в некоторой точке $\bar{\eta}$. Но в подынтегральную функцию входит $\tau \equiv \tau(\eta)$. Поскольку

мы решили задачу Коши для уравнения (12) с начальными данными η_h , τ_h , то теперь, находя из этого решения значение τ , соответствующее значению $\bar{\eta}$, мы получаем $\tau(\bar{\eta})$.

6. Численные результаты

Расчеты были проведены для двух вариантов с различными значениями параметров. Результаты расчетов, выполненные по предложенному в этой статье алгоритму (столбцы А в табл. 1), сравниваются с результатами расчетов, полученными с использованием метода, предложенного в [1] (столбцы Б в табл. 1).

Таблица 1

Вариант I			Вариант II		
γ	Толщина слоя h		γ	Толщина слоя h	
	А	Б		А	Б
2,01	1,055103780	1,055103746	1,42	4,395919968	4,395922112
2,81	1,258344557	1,258345487	1,54	5,072436712	5,072436071
3,61	1,315944922	1,315944931	1,67	5,489085973	5,489086404
4,41	1,368822993	1,368822998	1,79	5,916565209	5,916564798
5,21	1,451190636	1,451190601	1,91	6,340189967	6,340192095
6,01	1,551874308	1,551874267	2,03	7,016026419	7,016033460
6,81	1,696922546	1,696922519	2,16	7,782348020	7,782363560
7,61	1,920714312	1,920714306	2,28	8,931384541	8,931414989
8,41	2,324479963	2,324479956	2,41	10,866417185	10,86647914
9,21	3,266717891	3,266716288	2,53	15,110655334	15,11084544

Вариант I соответствует следующим значениям параметров: $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 4$, $\varepsilon_2 = 99$, $2 < \gamma < \sqrt{99}$, $\alpha = 0,01$.

Вариант II соответствует следующим значениям параметров: $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 2$, $\varepsilon_2 = 7$, $\sqrt{2} < \gamma < \sqrt{7}$, $\alpha = 0,01$.

Из рассмотрения табл. 1 можно заключить, что предложенный здесь метод решения нелинейной краевой задачи на собственные значения действительно позволяет решить поставленную задачу.

Важное достоинство предложенного метода заключается в том, что он может быть применен для изучения не только керровской нелинейности, но и таких нелинейностей, для которых уравнение (7) (или (12)) не может быть проинтегрировано в явном виде.

Автор благодарит Ю. Г. Смирнова за полезные замечания и внимание к работе.

Список литературы

1. **Валовик, Д. В.** О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, № 12. – С. 2186–2194.
2. Nonlinear surface electromagnetic phenomena (Modern problems in condensed matter sciences, Vol. 29) / ed.: H.-E. Ponath, G.I. Stegeman. – Netherlands : Elsevier Science publishers, 1991.

3. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2010. – 264 с.
4. **Баутин, Н. Н.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – М. : Наука, 1990. – 488 с.

Зарембо Екатерина Викторовна
соискатель, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Zarembo Ekaterina Viktorovna
Applicant, sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

УДК 517.927, 519.62, 517.958

Зарембо, Е. В.

Об одном численном методе решения нелинейной краевой задачи на собственные значения для электромагнитных ТМ-волн, распространяющихся в слое с Керровской нелинейностью / Е. В. Зарембо // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 1 (21). – С. 75–82.